$$|U_3 - a| \le \frac{2}{3}|U_2 - a| \le (\frac{2}{3})^3 |U_0 - a|$$

On constate alors que pour $n \in \mathbf{N}$, $|U_n - a| \le (\frac{2}{3})^n |U_0 - a|$

Montrons ce résultat par récurrence :

• pour $n = 0$, $|U_0 - a| \le (\frac{2}{3})^0 |U_0 - a|$

• supposons que pour un entier n donné, $|U_n - a| \le (\frac{2}{3})^n |U_0 - a|$ et montrons que $|U_{n+1} - a| \le (\frac{2}{3})^{n+1} |U_0 - a|$

On a : $|U_{n+1} - a| \le \frac{2}{3}|U_n - a| \le (\frac{2}{3})(\frac{2}{3})^n |U_0 - a| \le (\frac{2}{3})^{n+1} |U_0 - a|$

D'où $\forall n \in \mathbf{N}$, $|U_n - a| \le (\frac{2}{3})^n |U_0 - a|$ et comme $-1 < \frac{2}{3} < 1$ alors

$\lim\limits_{n \to +\infty} (\frac{2}{3})^n |U_0 - a| = 0$ ce qui prouve que $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = a$.

d) On a : $\forall n \in \mathbf{N}$, $|U_n - a| \le (\frac{2}{3})^n |U_0 - a| \le (\frac{2}{3})^n$

car $|U_0 - a| = \left|\frac{1}{2} - a\right| < 1$ ($a \in [0,1]$) donc il suffit de trouver le plus petit entier n_0 tel que $\forall n \ge n_0$, $(\frac{2}{3})^n \le 10^{-3}$

$(\frac{2}{3})^n \le 10^{-3} \Rightarrow \ln(\frac{2}{3})^n \le \ln(10^{-3}) \Rightarrow n \ln(\frac{2}{3}) \le \ln(10^{-3})$

$\Rightarrow n \ge \frac{\ln(10^{-3})}{\ln(\frac{2}{3})}$ (car $\ln(\frac{2}{3}) < 0$) d'où $n_0 = E(\frac{\ln(10^{-3})}{\ln(\frac{2}{3})}) + 1 = 18$.

Solution 8 :

A) 1°/ a) Pour tout entier $n \ge 2$, f_n est définie, continue et dérivable sur $\mathbf{R}$.

$\forall x \in \mathbf{R}$, $f_n'(x) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} e^{\frac{x}{n}}$